

# МЕТОДОЛОГИЯ ПОЛУЧЕНИЯ ЦЕЛЕВОЙ ФУНКЦИИ И РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ОПТИМИЗАЦИИ СПОСОБОВ И УСТРОЙСТВ ДЛЯ ИЗМЕРЕНИЯ ТЕПЛОФИЗИЧЕСКИХ СВОЙСТВ ВЕЩЕСТВ НА ПРИМЕРЕ МЕТОДА ПЛОСКОГО ИМПУЛЬСНОГО ИСТОЧНИКА ТЕПЛОТЫ

С. В. Пономарев<sup>1</sup>, В. О. Буланова<sup>2</sup>, Е. В. Буланов<sup>3</sup>

*Кафедра «Мехатроника и технологические измерения»,  
svropom@yahoo.com; ФГБОУ ВО «ТГТУ» (1);  
АО «Тамбовский завод «Октябрь» (2); ООО «РАСК» (3), Тамбов, Россия*

**Ключевые слова:** измерение; конструкционный размер; коэффициент температуропроводности; метод; обработка данных; оптимизация; погрешности; плоский тепловой импульс; режимные параметры; теплопроводность.

**Аннотация:** Рассмотрены методические рекомендации по применению теории теплопроводности, методов математической метрологии и теории погрешностей для получения записи целевой функции, постановки и последующего решения задачи оптимизации методов и устройств для измерения теплофизических свойств веществ. Приведен пример применения данных рекомендаций при разработке метода плоского импульсного источника теплоты для контроля теплофизических свойств твердых материалов.

---

## Введение

Выбор оптимальных значений как основных конструкционных размеров устройств, так и значений режимных параметров методов измерения теплофизических свойств (ТФС) веществ значительно повышает успех выполнения работ по проектированию и разработке новых методов и устройств, обладающих улучшенными метрологическими характеристиками.

В ФГБОУ ВО «ТГТУ» накоплен опыт [1 – 11] проектирования методов и устройств для измерения ТФС веществ на основе решения задач оптимизации с использованием целевых функций, для получения которых (с применением методов математической метрологии, теории погрешностей и математической физики) следует использовать следующие методические рекомендации о практическом порядке выполнения действий:

1) представить в виде словесного описания, схемы или чертежа физическую модель устройства [1 – 5, 7 – 11] для осуществления проектируемого и разрабатываемого метода измерения ТФС веществ;

2) записать постановку прямой краевой задачи теплопроводности, описывающей температурное поле внутри образца материала при проведении экспериментального измерения ТФС с применением методов математической физики (чаще всего, методов теории теплопроводности); примеры таких работ проведены в публикациях [1 – 3, 5 – 7, 10, 11];

3) получить ее аналитическое решение в виде формул, позволяющих рассчитывать температурное поле внутри образца исследуемого материала путем решения прямой краевой задачи теплопроводности, например так, как это показано в [1 – 3, 5 – 7, 10, 11, 14, 16];

4) получить расчетные формулы для вычисления искомых ТФС по экспериментальным данным, определяемым в процессе измерения этих ТФС, на основе решения прямой краевой задачи теплопроводности [1 – 3, 5 – 7, 10, 11]; иногда возможно получение расчетных формул на основе постановки прямой краевой задачи теплопроводности без использования ее аналитического решения [1, 10, 11];

5) путем применения методов математической метрологии и теории погрешностей [1 – 7, 13] на базе полученных расчетных формул для вычисления искомых ТФС надо получить целевые функции (в виде формул для вычисления среднеквадратичных оценок относительных погрешностей косвенных измерений искомых ТФС), обычно зависящие: а) от режимных параметров проведения процесса измерения; б) основных конструкционных размеров измерительного устройства; в) параметров применяемого алгоритма обработки экспериментальных данных; г) погрешностей измерения физических величин, непосредственно определяемых в процессе эксперимента;

6) в дальнейшем формулы (для вычисления среднеквадратичных оценок относительных погрешностей косвенных измерений искомых ТФС) используют в качестве целевых функций при математическом моделировании погрешностей измерения ТФС [1 – 7] и решении задач оптимизации методов и устройств для измерения искомых ТФС; в результате решения задачи оптимизации, как правило, определяют наилучшие (обеспечивающие минимизацию погрешностей измерений искомых ТФС исследуемых веществ и материалов) значения: а) режимных параметров проведения процесса измерения; б) основных конструкционных размеров измерительного устройства; в) параметров алгоритма обработки экспериментальных данных; г) погрешностей измерения физических величин, непосредственно определяемых в процессе эксперимента по измерению искомых ТФС;

7) сформулировать практические рекомендации по осуществлению как режимных параметров разработанного нового метода измерения ТФС, так и основных (базовых) конструкционных размеров устройства для осуществления этого метода с учетом результатов решения задачи оптимизации; как правило, сформулированные практические рекомендации могут быть использованы в качестве основы при записи формулы изобретения и последующей подаче заявки на изобретение с целью защитить результаты выполненной работы (исследования) патентом [4, 5];

8) следует отметить, что после изготовления опытного образца измерительного устройства и экспериментальной проверки разработанного нового метода измерения ТФС веществ (с использованием эталонных материалов с известными теплофизическими свойствами), в алгоритм для обработки экспериментальных данных, как правило, приходится включать методику введения поправок на систематические погрешности измерений ТФС [6].

**Пример применения теоретических основ математической физики,  
математической метрологии и теории погрешностей при выводе расчетных  
соотношения для вычисления среднеквадратичных оценок  
относительных погрешностей измерения ТФС веществ при разработке  
метода плоского импульсного источника теплоты**

Цель работы – рассмотрение примера выработки рекомендаций по выбору наилучших (оптимальных с точки зрения минимизации погрешностей измерения ТФС) режимных параметров метода плоского импульсного источника теплоты

и основного конструкционного размера устройства для его осуществления, а именно [6 – 8]: 1) рекомендуемых условий как сбора данных, так и осуществления процесса обработки данных, полученных в ходе эксперимента; 2) оптимальной длительности теплового импульса, подводимого к плоскому нагревателю; 3) значения толщины средней пластины образца исследуемого материала, обеспечивающего минимизацию погрешности измерений.

*Физическая модель измерительного устройства* представляет собой ячейку, в которую помещают образец, состоящий из трех пластин – нижней, средней и верхней. Наиболее высокие требования предъявляются к точности изготовления средней пластины толщины  $x$ , верхняя и нижняя грани которой должны быть выполнены строго параллельно друг другу. Между нижней и средней пластинами обычно размещают малоинерционный плоский нагреватель, а между средней и верхней – устанавливают датчик температуры, например, термометр сопротивления или термоэлектрический преобразователь (термопару) [1 – 5, 7, 15].

*Математическая модель температурного поля в образце исследуемого материала при использовании рассматриваемого метода и устройства.* Для рассматриваемого метода плоского импульсного источника теплоты, математическая модель температурного поля  $T(x, \tau)$  представляет собой краевую задачу теплопроводности [4, 5]:

$$\frac{\partial T(x, \tau)}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 T(x, \tau)}{\partial x^2}, \quad \tau > 0, \quad 0 < x < \infty; \quad (1)$$

$$T(x, 0) = T_0 = 0; \quad (2)$$

$$-\lambda \frac{\partial T(0, \tau)}{\partial x} = q(\tau, \tau_n) = q_c [h(\tau) - h(\tau - \tau_n)]; \quad (3)$$

$$T(\infty, \tau) = T_0 = 0, \quad (4)$$

где  $x, \tau$  – пространственная координата образца и время соответственно;  $c_p, \lambda$  – соответственно объемная теплоемкость и теплопроводность исследуемого материала;  $T_0$  – начальная температура материала (в момент времени  $\tau = 0$ ), принимаемая за начало температурной шкалы в каждом эксперименте, то есть  $T_0 = 0$ ;  $\tau_n$  – длительность реального (не мгновенного) теплового импульса, подводимого к нагревателю;  $q(\tau, \tau_n)$  – функция, определяющая импульсный плоский источник теплоты;  $q_c$  – тепловой поток, подводимый к образцу через поверхность  $x = 0$  в течение промежутка времени  $0 < \tau \leq \tau_n$ ;  $h(\tau), h(\tau - \tau_n)$  – единичные асимметричные ступенчатые функции, задаваемые соотношениями [4, 5, 12]:

$$h(\tau) = \begin{cases} 0 & \text{при } \tau < 0, \\ 1 & \text{при } \tau \geq 0; \end{cases} \quad h(\tau - \tau_n) = \begin{cases} 0 & \text{при } \tau < \tau_n, \\ 1 & \text{при } \tau \geq \tau_n. \end{cases} \quad (5)$$

*Аналитическое решение краевой задачи (1) – (4) имеет вид [7, 19, 20]:*

$$T(x, \tau) - T_0 = \frac{2q_c}{\lambda} f(x, \tau, \tau_n, a); \quad (6)$$

где

$$f(x, \tau, \tau_n, a) = \begin{cases} \sqrt{a\tau} \operatorname{ierfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{a\tau}}\right) & \text{при } 0 < \tau \leq \tau_n, \\ \sqrt{a\tau} \operatorname{ierfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{a\tau}}\right) - \sqrt{a(\tau - \tau_n)} \operatorname{ierfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{a(\tau - \tau_n)}}\right) & \text{при } 0 > \tau_n, \end{cases} \quad (7)$$

$\operatorname{ierfc}(u) = \int_u^\infty \operatorname{ierfc}(W) dW = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-e^2} - u \operatorname{erfc}(u)$  – специальная функция [4, 5, 15, 16],

представляющая собой интеграл от функции  $\operatorname{erfc}(W) = 1 - \operatorname{erf}(W)$ ;

$\operatorname{erf}(W) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^W e^{-W^2} dW$  – функция ошибок Гауса [4, 5, 12, 14 – 16].

Для времени  $\tau \geq \tau_n$  решение (6) с учетом (7) принимает вид

$$T(x, \tau) - T_0 = \frac{q_c x}{\lambda} \left[ \frac{\operatorname{ierfc}[U(\tau)]}{U(\tau)} - \frac{\operatorname{ierfc}[U(\tau - \tau_n)]}{U(\tau - \tau_n)} \right], \quad (8)$$

где  $U(\tau) = \frac{x}{2\sqrt{a\tau}}$ ,  $U(\tau - \tau_n) = \frac{x}{2\sqrt{a(\tau - \tau_n)}}$  – безразмерные функции  $x$ ,  $\tau$ ,  $\tau_n$ ,  $a$ .

*Традиционный подход к проведению эксперимента и последующей обработке полученных данных* при измерении ТФС известным методом плоского «мгновенного» источника теплоты состоит из нескольких этапов [1, 2, 7]:

1) изготавливают образец исследуемого материала в виде трех пластин, между которыми размещают плоский нагреватель и термоэлектрический преобразователь, а затем дожидаются достижения равномерного распределения температурного поля  $T(x, \tau) = T_0 = \text{const}$  внутри исследуемого образца;

2) в течение очень короткого промежутка времени  $0 < \tau \leq \tau_n$  на плоский электронагреватель площадью  $S$  подают постоянную мощность  $P$  и по сигналу термопары регистрируют изменение разности температур  $[T(x, \tau) - T_0]$  во времени  $\tau$ ;

3) по полученным экспериментальным данным определяют максимальное значение разности температур  $[T_{\max} - T_0] = [T(x, \tau_{\max}) - T_0]$  и значение момента времени  $\tau = \tau_{\max}$ , соответствующее этому максимальному значению  $[T_{\max} - T_0]$ ;

4) по этим значениям  $\tau_{\max}$ ,  $T_{\max} - T_0$  с учетом известных значений расстояния  $x$  и суммарного количества теплоты  $Q_n$ , подведенного к образцу, вычисляют искомые значения коэффициента температуропроводности  $a$  и теплопроводности  $\lambda$  исследуемого материала по известным формулам [1, 15]

$$a = \frac{x^2}{2\tau_{\max}}, \quad \lambda = \frac{Q_n}{T\sqrt{2\pi\tau_{\max}}}.$$

Для традиционного порядка проведения эксперимента и обработки полученных данных характерны следующие недостатки: 1) высокая относительная погрешность определения момента времени  $\tau = \tau_{\max}$  (порядка 15 – 20 %), 2) отсутствие рекомендаций по выбору: а) оптимальных условий обработки экспериментальных данных; б) оптимальной толщины  $x$  средней пластины образца; в) оптимального значения длительности  $\tau_n$  теплового импульса.

*Расчетные формулы для вычисления искомых ТФС по экспериментальным данным.* Методика обработки экспериментальных данных, предложенная в [4, 5], базируется на использовании безразмерного параметра

$$\gamma = \frac{T(x, \tau) - T_0}{T(x, \tau_{\max}) - T_0}, \quad (9)$$

представляющего отношение текущего значения разности температур  $[T(x, \tau) - T_0]$  к ее максимальному значению  $[T_{\max} - T_0] = [T(x, \tau_{\max}) - T_0]$  в момент времени  $\tau = \tau_{\max}$ , каждой величине которого, а следовательно, каждому значению  $\gamma$ , на интервале  $0 < \tau < \tau_k$  (где  $\tau_k$  – момент окончания эксперимента) соответствует конкретный момент времени  $\tau'$  и значение безразмерной функции  $U(\tau') = \frac{x}{2\sqrt{a\tau'}}$ .

По данным, полученным в процессе экспериментального измерения ТФС (в виде массива разностей температур  $[T(x, \tau) - T_0]$ , соответствующих известным моментам времени  $\tau$ ), в процессе обработки необходимо определить величину безразмерной функции  $U(\tau') = \frac{x}{2\sqrt{a\tau'}}$ , соответствующую заданному значению безразмерного параметра  $\gamma$ . Для этого в [4, 5] предложен следующий подход. Если в формулу (8) подставить значение  $\tau = \tau_{\max}$ , то получаем

$$T_{\max} - T_0 = T(x, \tau_{\max}) - T_0 = \frac{q_c x}{\lambda} \left[ \frac{\text{ierfc}[U(\tau_{\max})]}{U(\tau_{\max})} - \frac{\text{ierfc}[U(\tau_{\max} - \tau_{\text{и}})]}{U(\tau_{\max} - \tau_{\text{и}})} \right], \quad (8a)$$

а после деления (8) на (8a) соотношение (9) приобретает вид

$$\gamma = \frac{T(x, \tau) - T_0}{T_{\max} - T_0} = \frac{\frac{\text{ierfc}[U(\tau)]}{U(\tau)} - \frac{\text{ierfc}[U(\tau - \tau_{\text{и}})]}{U(\tau - \tau_{\text{и}})}}{\frac{\text{ierfc}[U(\tau_{\max})]}{U(\tau_{\max})} - \frac{\text{ierfc}[U(\tau_{\max} - \tau_{\text{и}})]}{U(\tau_{\max} - \tau_{\text{и}})}}. \quad (9a)$$

В ходе выполненного исследования, при численном моделировании процесса измерений определяли массив разностей температур  $[T(x, \tau) - T_0]$ , а затем, методом перебора, находили максимальное значение  $T_{\max} - T_0$ , аналитическое выражение для которого получается из (8) при  $\tau = \tau_{\max}$  в виде (8a). При известном  $T_{\max} - T_0$  и заданном  $\gamma$  из уравнения (9a) находили его корень в виде значения безразмерной функции  $U(\tau')$ . По найденному значению безразмерной функции  $U(\tau')$  (при известных соответствующих значениях  $x$  и  $\tau'$ ), на основе соотношения  $U(\tau') = \frac{x}{2\sqrt{a\tau'}}$  искомое значение коэффициента теплопроводности вычисляли по формуле

$$a = \frac{x^2}{4\tau'(U(\tau'))^2}. \quad (10)$$

С учетом (8) и (9), формула для вычисления теплопроводности приобретает вид

$$\lambda = \Phi[U(\tau'), \tau_{\text{и}}, \tau'] \frac{q_c x}{[T(x, \tau') - T_0]}, \quad (11)$$

$$\text{где } \Phi[U(\tau'), \tau_{и}, \tau'] = \frac{\text{ierfc}[U(\tau')]}{U(\tau')} - \frac{\text{ierfc}\left[U(\tau')\sqrt{\frac{\tau'}{\tau' - \tau_{и}}}\right]}{U(\tau')\sqrt{\frac{\tau'}{\tau' - \tau_{и}}}}.$$

*Математическая модель среднеквадратичной оценки относительных погрешностей  $(\delta a)_{\text{СК}}$  измерения коэффициента температуропроводности.* Согласно теории погрешностей [1, 7, 13], после логарифмирования зависимости (10), определения дифференциала от левой и правой частей и последующего выполнения действий по рекомендациям [1 – 5, 7], получено соотношение

$$(\delta a)_{\text{СК}} = \sqrt{4(\delta x)^2 + \left[ \frac{\Delta T}{\tau' \left\{ \frac{d[T(x, \tau) - T_0]}{d\tau'} \right\}} \right]^2 + \left[ \frac{1}{U'} \frac{dU'}{d\gamma} \sqrt{\gamma^2 + 1} \delta(T_{\text{max}} - T_0) \right]^2}, \quad (12)$$

применяемое в дальнейшем при осуществлении расчетов в целях определения (для случая измерения коэффициента температуропроводности) оптимальных значений: 1) безразмерного параметра  $\gamma$ ; 2) основного конструкционного размера  $x$  средней пластины исследуемого образца.

*Математическая модель среднеквадратичной оценки относительной погрешности  $(\delta \lambda)_{\text{СК}}$  измерения теплопроводности  $\lambda$ .* С учетом того, что при каждой известной длительности  $\tau_{и}$  теплового импульса значения момента времени  $\tau' = \tau'(\gamma)$  и безразмерной функции  $U(\tau'(\gamma)) = U'(\gamma)$  зависят от безразмерного параметра  $\gamma$ , ранее полученная формула (11) для вычисления теплопроводности  $\lambda$  преобразована к виду [4, 5]

$$\lambda = \frac{q_c x}{[T(x, \tau(\gamma)) - T_0]} F(\gamma), \quad (13)$$

где  $F(\gamma) \equiv \Phi[U(\tau'(\gamma)), U(\tau'(\gamma) - \tau_{и})]$ .

Согласно рекомендациям теории погрешностей [1, 7, 13], после логарифмирования зависимости (13), определения дифференциалов от левой и правой частей и последующего выполнения действий по рекомендациям, детально изложенным в [1 – 5, 7, 13]), в работах [4, 5] получено соотношение для вычисления среднеквадратичной оценке  $(\delta \lambda)_{\text{СК}}$  относительной погрешности определения теплопроводности, имеющее вид

$$(\delta \lambda)_{\text{СК}} = \sqrt{(\delta q_c)^2 + (\delta x)^2 + \left\{ \frac{1}{F(\gamma)} \frac{\partial F(\gamma)}{\partial \gamma} + \sqrt{1 + \gamma^2} \delta(T_{\text{max}} - T_0) \right\}^2 + \left( \frac{\Delta T}{T(x, \tau) - T_0} \right)^2}. \quad (14)$$

*Выбор оптимального значения длительности  $\tau_{и}$  теплового импульса, подводимого к плоскому нагревателю.* В процессе работы стало очевидно, что относительные среднеквадратичные погрешности  $(\delta a)_{\text{СК}}$  измерения коэффициента температуропроводности  $a$  и  $(\delta \lambda)_{\text{СК}}$  измерения теплопроводности  $\lambda$  зависят также от длительности  $\tau_{и}$  теплового импульса. Для снижения погрешностей измерения теплопроводности  $(\delta \lambda)_{\text{СК}}$  при проведении измерений надо обеспечить такие режи-

мы выполнения экспериментов, при которых максимальная разность температур в образце менялась бы не очень сильно, то есть  $[T_{\max} - T_0] \approx \text{const}$ . Для этого к единице поверхности ( $1 \text{ м}^2$ ) образца в каждом эксперименте следует подводить примерно постоянное количество теплоты,  $Q_{\text{п}} = 2q_c \tau_{\text{и}} = \text{const}$ . Тогда потребляемую нагревателем мощность, обеспечивающую выполнение условия  $Q_{\text{п}} \approx \text{const}$ , можно рассчитать по формуле  $P = Q_{\text{п}} S / \tau_{\text{и}}$ . При этом тепловой поток (от нагревателя, имеющего мощность  $P$  и площадь  $S$ ), подводимый к нижней стороне средней пластины в течение промежутка времени  $0 \leq \tau \leq \tau_{\text{и}}$ , можно вычислить по формуле [4, 5]

$$q_c = \frac{P}{2S}. \quad (15)$$

Экспериментальные исследования показали следующее. При использовании образцов теплоизоляционных материалов (с толщиной средней пластины  $2,5 \dots 5,0$  мм, коэффициентом температуропроводности  $a = (1 \dots 1,5) \cdot 10^{-7} \text{ м}^2/\text{с}$  и теплопроводностью  $\lambda = 0,05 \dots 0,2 \text{ Вт}/(\text{м}\cdot\text{К})$ , для получения разности температур в диапазоне  $3 \dots 7 \text{ }^\circ\text{C}$  подводимое к единице поверхности количество теплоты должно быть в диапазоне значений  $Q_{\text{п}} \approx 50 \dots 80 \text{ кДж}/\text{м}^2$ . При значениях величины  $Q_{\text{п}} = 55 \text{ кДж}/\text{м}^2$  и площади нагревателя  $S = 0,01 \text{ м}^2$ , потребляемую нагревателем мощность можно вычислить по формуле

$$P = \frac{550}{\tau_{\text{и}}}. \quad (16)$$

После логарифмирования выражения (15), определения дифференциалов от его левой и правой частей, а также выполнения рекомендаций теории погрешностей [1, 10, 17], получаем

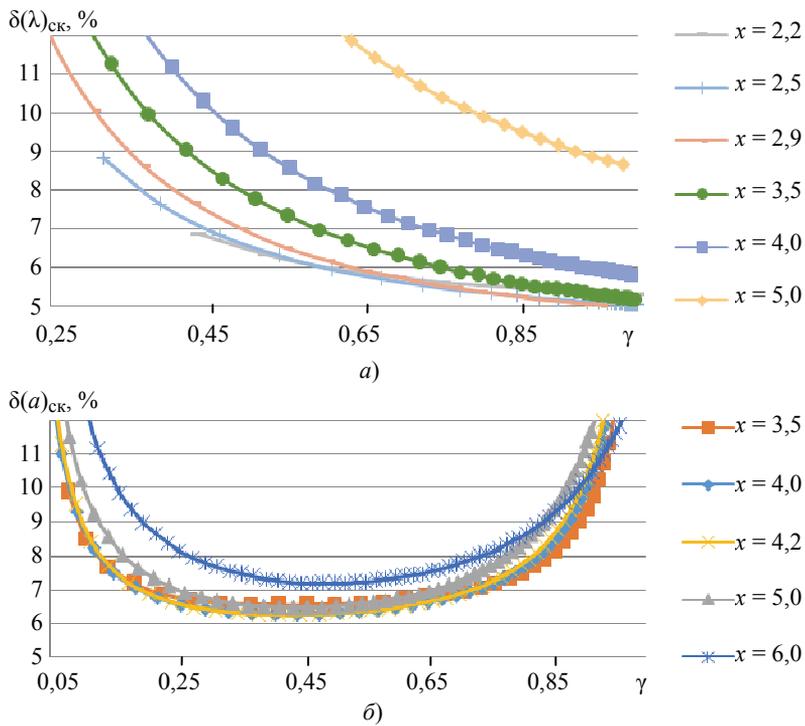
$$\delta q_c = \sqrt{(\delta P)^2 + (\delta S)^2} = \sqrt{\left(\frac{\Delta P}{P(\tau_{\text{и}})}\right)^2 + \left(\frac{\Delta S}{S}\right)^2}. \quad (17)$$

После подстановки (17) в (14) при вычислении  $P(\tau_{\text{и}})$  по формуле (16), получаем

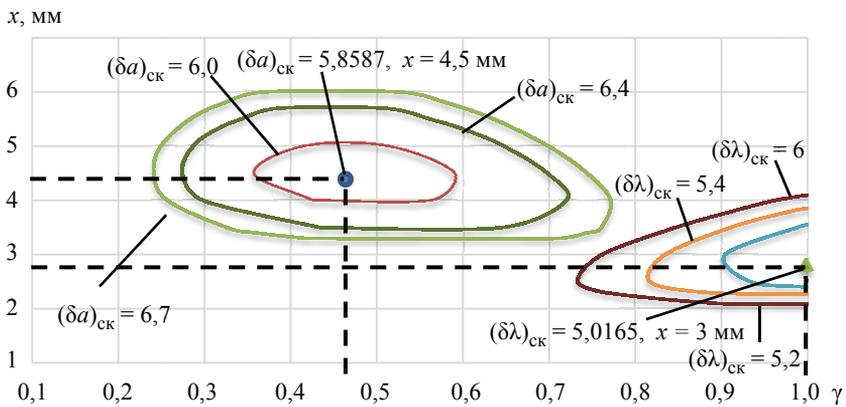
$$(\delta \lambda)_{\text{ск}} = \sqrt{\left[\frac{\Delta P}{P(\tau_{\text{и}})}\right]^2 + (\delta S)^2 + (\delta x)^2 + (\gamma^2 + 1) \left(\frac{\partial F(\gamma)}{F(\gamma) \partial \gamma} \delta(T_{\max} - T_0)\right)^2 + \left(\frac{\Delta T}{(T(x, \tau) - T_0)}\right)^2}. \quad (18)$$

*Результаты численного моделирования среднеквадратичных оценок относительных погрешностей измерения коэффициента температуропроводности  $a$  и теплопроводности  $\lambda$ .* Из полученных формул (12) и (18) рассчитаны зависимости среднеквадратичных относительных погрешностей  $(\delta a)_{\text{ск}}$ ,  $(\delta \lambda)_{\text{ск}}$  при длительности теплового импульса  $\tau_{\text{и}} = 21 \text{ с}$  (рис. 1). При этом использованы исходные данные:  $\delta S = 0,5 \%$ ,  $Q_{\text{п}} = 55 \text{ кДж}/\text{м}^2$ ,  $5 \text{ с} < \tau_{\text{и}} < 40 \text{ с}$ ,  $a = 1,06 \cdot 10^{-7} \text{ м}^2/\text{с}$ ,  $\lambda = 0,194 \text{ Вт}/(\text{м}\cdot\text{К})$ ,  $\Delta P = 0,5 \text{ Вт}$ ,  $x = (2 \dots 8) \text{ мм}$ ,  $\Delta x = 0,1 \text{ мм}$ ,  $\Delta T = 0,05 \text{ К}$ .

В процессе работы выяснилось, что минимальные значения относительных погрешностей  $(\delta a)_{\text{ск}}$ ,  $(\delta \lambda)_{\text{ск}}$  зависят не только от величины безразмерного параметра  $\gamma$ , но и от значения расстояния  $x$  от плоскости размещения нагревателя до плоскости установки термомпары, измеряющей разность температур  $[T(x, \tau') - T_0]$ . Поэтому принято решение построить (на плоскости с координатами  $\gamma$  и  $x$ ) линии равных уровней погрешностей (рис. 2).



**Рис. 1. Зависимости среднеквадратичных относительных погрешностей  $(\delta\lambda)_{СК}$  и  $(\delta a)_{СК}$  (от безразмерного параметра  $\gamma$ ) при различных значениях расстояния  $x$  от места действия плоского импульсного источника теплоты до плоскости, в которой размещена термопара, измеряющая разность температур  $[T(x, \tau') - T_0]$  при экспериментальном определении:**  
 $a$  – теплопроводности  $\lambda$ ;  $b$  – коэффициента температуропроводности  $a$



**Рис. 2. Линии равных уровней среднеквадратичных относительных погрешностей  $(\delta a)_{СК}$  и  $(\delta\lambda)_{СК}$ , построенные при оптимальной длительности  $\tau_{и}$  теплового импульса 21 с**

Результаты вычислений показывают, что (при использованных в расчетах исходных данных) приемлемые значения среднеквадратичных относительных погрешностей  $(\delta a)_{СК}$  измерения коэффициента температуропроводности  $a$  имеют

место при значениях безразмерного параметра в диапазоне  $0,35 < \gamma^a \leq 0,59$  и значениях основного конструкционного размера измерительного устройства в пределах, мм,  $4,0 < x \leq 5,0$ . При этом минимальные значения погрешности  $(\delta a)_{\text{СК}}$  достигаются при  $\gamma_{\text{опт}}^a \approx 0,465$  и  $x_{\text{опт}}^a \approx 4,5$  мм.

В то же время, приемлемые значения среднеквадратичных относительных погрешностей  $(\delta \lambda)_{\text{СК}}$  измерения теплопроводности  $\lambda$  имеют место в диапазоне значений  $0,90 < \gamma \leq 1,0$  и  $2,4 < x \leq 3,6$ . При этом минимальные значения погрешностей  $(\delta \lambda)_{\text{СК}}$  достигаются при  $\gamma_{\text{опт}}^\lambda \approx 1$  и  $x_{\text{опт}}^\lambda \approx 3,0$  мм.

Таким образом для достижения минимальных значений погрешности  $(\delta a)_{\text{СК}}$  и  $(\delta \lambda)_{\text{СК}}$  при измерении коэффициента температуропроводности  $a$  и теплопроводности  $\lambda$  исследуемого материала, следует использовать измерительный преобразователь с расстоянием между измерителем температуры и нагревателем в диапазоне, мм,  $3,0 < x < 4,5$ , причем можно принять  $x_{\text{опт}} = \frac{x_{\text{опт}}^a + x_{\text{опт}}^\lambda}{2} = 3,75$  мм.

Для уточнения оптимального значения длительности  $\tau_{\text{и}}$  теплового импульса, обеспечивающего достижение минимальных значений относительных погрешностей  $(\delta a)_{\text{СК}}$ ,  $(\delta \lambda)_{\text{СК}}$  и среднеарифметических значений погрешностей  $\delta_{\text{ср}} = \frac{[(\delta a)_{\text{СК}} + (\delta \lambda)_{\text{СК}}]}{2}$  измерения ТФС  $a$  и  $\lambda$ , выполнены расчеты по формулам

(12) и (18) (при уже ранее определенных оптимальных значениях  $\gamma_{\text{опт}}^a = 0,465$ ;  $\gamma_{\text{опт}}^\lambda = 1$ ;  $x_{\text{опт}} = 3,75$  мм) (рис. 3). Очевидно, что при изменении длительности  $\tau_{\text{и}}$  теплового импульса, среднеарифметическое значение среднеквадратичных оценок относительных погрешностей принимает минимальные значения при  $\tau_{\text{и}}^{\text{опт}} \approx 21$  с, находящемся в диапазоне  $18 < \tau_{\text{и}} < 24$ .

Из приведенной зависимости может сложиться неправильное впечатление, что при учете влияния длительности  $\tau_{\text{и}}$  теплового импульса снижение погрешностей измерений происходит всего на 0,025 – 0,063 % (см. рис. 3). Применение предложенных в работах [6 – 8] метода измерения и методики обработки данных позволяет величину среднеарифметического значения среднеквадратичных оценок относительных погрешностей

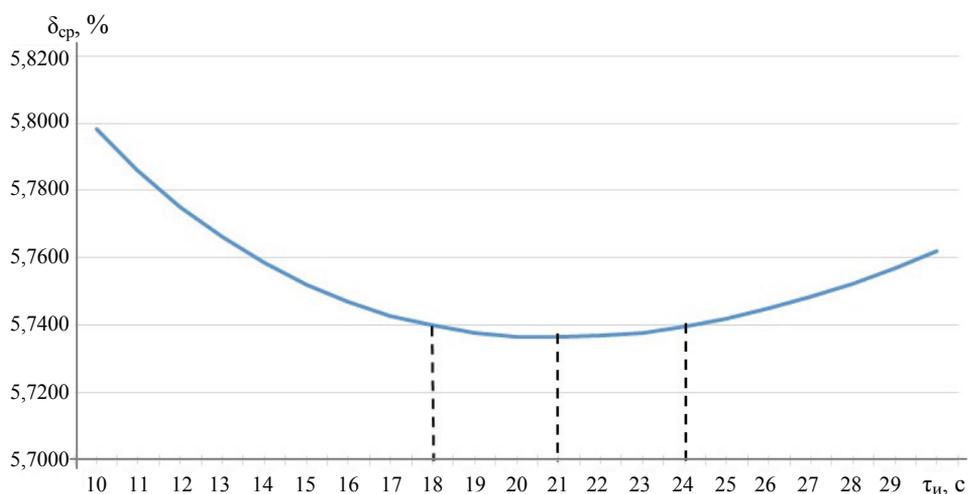
$$\delta_{\text{ср}} = \frac{[(\delta a)_{\text{СК}} + (\delta \lambda)_{\text{СК}}]}{2} \quad (19)$$

снизить на 5 – 8 % по сравнению с традиционным методом плоского «мгновенного» источника теплоты [1, 2, 10, 19].

Для иллюстрации данного факта выполнены расчеты значений коэффициента температуропроводности  $a$  и теплопроводности  $\lambda$  при различных значениях длительности  $\tau_{\text{и}}$  теплового импульса с применением:

- предложенных в работах [4, 5] расчетных соотношений (10) и (11);
- расчетных соотношений [1, 2, 7, 15]:

$$a_{\text{МГН}} = \frac{x^2}{2\tau_{\text{max}}}; \quad \lambda_{\text{МГН}} = \frac{Q_n x_0}{2\sqrt{2\pi\epsilon\tau_{\text{max}}T_{\text{max}}}}, \quad (20)$$



**Рис. 3. Зависимости среднеарифметических значений (19) среднеквадратичных оценок относительных погрешностей  $(\delta a)_{\text{ск}}$  и  $(\delta \lambda)_{\text{ск}}$  измерения коэффициента температуропроводности  $a$  и теплопроводности  $\lambda$  от длительности  $\tau_{\text{и}}$  теплового импульса при обработке данных методом плоского импульсного источника теплоты [6 – 8]**

используемых при осуществлении традиционного метода плоского «мгновенного» источника теплоты. В этих расчетах использованы точные значения  $a_{\text{T}} = 1,06 \cdot 10^{-7} \text{ м}^2/\text{с}$ ;  $\lambda_{\text{T}} = 0,194 \text{ Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})$ ;  $x_{\text{опт}} = 3,75 \text{ мм}$ , а величину мощности вычисляли по формуле (16).

После вычисления значений  $a$  и  $\lambda$  по формулам (10) и (11), а также  $a_{\text{МГН}}$  и  $\lambda_{\text{МГН}}$  по формулам (20), рассчитывали погрешности  $\delta a = \frac{a - a_{\text{T}}}{a_{\text{T}}} 100 \%$ ,

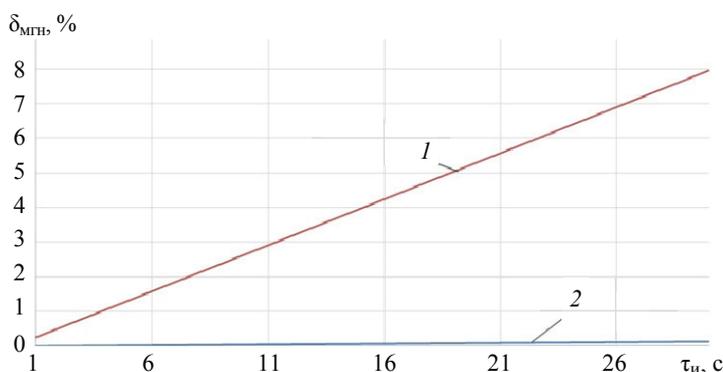
$$\delta \lambda = \frac{\lambda - \lambda_{\text{T}}}{\lambda_{\text{T}}} 100 \%, \quad \delta a_{\text{МГН}} = \frac{a_{\text{МГН}} - a_{\text{T}}}{a_{\text{T}}} 100 \%, \quad \delta \lambda_{\text{МГН}} = \frac{\lambda_{\text{МГН}} - \lambda_{\text{T}}}{\lambda_{\text{T}}} 100 \%, \quad \text{а затем}$$

$$\text{среднеарифметические значения } \bar{\delta} = \frac{[\delta a + \delta \lambda]}{2} \text{ и } \bar{\delta}_{\text{МГН}} = \frac{[\delta a_{\text{МГН}} + \delta \lambda_{\text{МГН}}]}{2}.$$

В результате получены графики  $\bar{\delta} = f_1(\tau_{\text{и}})$  и  $\bar{\delta}_{\text{МГН}} = f_2(\tau_{\text{и}})$  (рис. 4). Из приведенных графиков видно, что при численном моделировании измерения теплофизических свойств получены следующие результаты:

1) при использовании предлагаемого в работах [4, 5] метода плоского импульсного источника теплоты среднеарифметические значения погрешностей  $\bar{\delta} = f_1(\tau_{\text{и}})$  обработки данных не превышают 1 %;

2) при обработке данных с применением расчетных соотношений (20), лежащих в основе традиционного метода плоского «мгновенного» источника теплоты [1, 2, 7, 15], среднеарифметические значения погрешностей обработки данных  $\bar{\delta}_{\text{МГН}} = \frac{[\delta a_{\text{МГН}} + \delta \lambda_{\text{МГН}}]}{2} = f_2(\tau_{\text{и}})$  достигают величин 5 – 8 % при длительности теплового импульса в диапазоне  $17 < \tau_{\text{и}} < 30$ .



**Рис. 4. Сравнение погрешностей обработки экспериментальных данных:**

1 –  $\bar{\delta}_{\text{мгн}} = f_2(\tau_n)$  – традиционным методом плоского «мгновенного» источника теплоты;  
 2 –  $\bar{\delta} = f_1(\tau_n)$  – методом плоского импульсного источника теплоты [4 – 7]

### Заключение

*Рекомендации по осуществлению метода плоского импульсного источника теплоты, предложенного в [5, 7].* При измерении теплофизических свойств исследуемого материала, значения коэффициентов температуропроводности  $a$  и теплопроводности  $\lambda$  которого отличаются от использованных в данной статье (в исходных данных рассмотренных выше расчетов), следует поступить следующим образом:

1) путем проведения предварительных измерений следует экспериментально определить ориентировочные значения коэффициента температуропроводности  $a_{\text{оп}}$  и теплопроводности  $\lambda_{\text{оп}}$  исследуемого материала;

2) действуя по аналогии с представленной методикой, необходимо осуществить расчеты (при найденных значениях  $a_{\text{оп}}$  и  $\lambda_{\text{оп}}$ ) в целях определения (уточнения) оптимальных значений параметра  $\gamma_{\text{опт}}$  и конструкционных размеров  $x_{\text{опт}}^a$  и  $x_{\text{опт}}^\lambda$  средней пластины, применяемой для измерения коэффициента температуропроводности  $a$  и теплопроводности  $\lambda$ ;

3) изготовить образцы с двумя средними пластинами с толщиной  $x_{\text{опт}}^a$  и  $x_{\text{опт}}^\lambda$ , либо с одной средней пластиной с толщиной  $x_{\text{опт}} = (x_{\text{опт}}^a + x_{\text{опт}}^\lambda) / 2$ ;

4) путем проведения серии экспериментов (с изготовленными образцами) осуществить измерения и последующую обработку полученных данных и, в результате, получить значения искомого коэффициента температуропроводности  $a$  и теплопроводности  $\lambda$  исследуемого материала.

### Список литературы

1. Теоретические и практические основы теплофизических измерений : монография / С. В. Пономарев, С. В. Мищенко, А. Г. Дивин [и др.] ; под ред. С. В. Пономарева. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2008. – 408 с.
2. Гуров, А. В. Измерение теплофизических свойств теплоизоляционных материалов методом плоского «мгновенного» источника теплоты : монография / А. В. Гуров, С. В. Пономарев ; под ред. С. В. Пономарева. – Тамбов : Изд-во ФГБОУ ВПО «ТГТУ», 2013. – 100 с.
3. The Choice of the Optimum Conditions for Measuring the Thermal Properties of Materials by the Plane «Instantaneous» Heat Source Method / A. V. Gurov, G. A. Sosedov, A. E. Rodina, S. V. Ponomarev // Measurement Techniques. – 2012. – Vol. 55, No. 10. – P. 1187 – 1192. doi: 10.1007/s11018-012-0106-9

4. Минимизация погрешностей измерений коэффициентов теплопроводности и температуропроводности теплоизоляционных материалов методом плоского импульсного источника теплоты / С. В. Пономарев, Е. В. Буланов, В. О. Буланова, А. Г. Дивин // Измерительная техника. – 2018. – № 12. – С. 43 – 46. doi: 10.32446/0368-1025it.2018-12-43-46

5. Буланов, Е. В. Повышение точности измерения теплофизических свойств теплоизоляционных материалов с применением метода плоского импульсного источника теплоты : дис. ... канд. техн. наук : 05.11.13 / Буланов Евгений Владимирович. – Тамбов, 2019. – 122 с.

6. Рекомендации по разработке методики введения поправок на систематические погрешности измерения теплофизических свойств веществ / С. В. Пономарев, А. Г. Дивин, П. В. Балабанов [и др.] // Метрология. – 2013. – № 10. – С. 38 – 47.

7. Пономарев, С. В. Применение математических основ метрологии при оптимизации режимных параметров методов и основных конструктивных размеров устройств для измерения теплофизических свойств веществ : монография / С. В. Пономарев, А. Г. Дивин, Д. А. Любимова ; под ред. С. В. Пономарева. – Тамбов : Изд-во ФГБОУ ВПО «ТГТУ», 2015. – 160 с.

8. Пономарев, С. В. Методы и устройства для измерения эффективных теплофизических характеристик потоков технологических жидкостей / С. В. Пономарев, С. В. Мищенко. – Тамбов : Изд-во Тамб. гос. техн. ун-та, 1997. – 248 с.

9. Ponomarev, S. V. Measurements of Thermophysical Properties by Laminar Flow Methods / S. V. Ponomarev, S. V. Mishchenko, T. F. Irvine. – New-York : Begell House Inc., 2001. – 278 p.

10. Чуриков, А. А. Методы и средства неразрушающего контроля теплофизических свойств изделий и образцов из неоднородных твердых материалов : дис. ... д-ра техн. наук : 05.11.13 / Чуриков Александр Алексеевич. – Тамбов, 2000. – 641 с.

11. Власов, В. В. Теплофизические измерения. Справочное пособие по методам расчета полей, характеристик теплопереноса и автоматизации измерений / В. В. Власов, Ю. С. Шаталов, С. В. Пономарев [и др.]. – Тамбов : Изд-во ВНИИРТмаш, 1975. – 256 с.

12. Корн, Г. Справочник по математике для научных работников и инженеров. Определения. Теоремы. Формулы / Г. Корн, Т. Корн. – М. : Наука, 1973. – 832 с.

13. Зайдель, А. Н. Ошибки измерений физических величин / А. Н. Зайдель. – Л. : Наука, 1974. – 108 с.

14. Лыков, А. В. Теория теплопроводности / А. В. Лыков. – М. : Высш. школа, 1967. – 600 с.

15. Методы определения теплопроводности и температуропроводности / А. Г. Шашков, Г. М. Волохов, Т. Н. Абраменко, В. П. Козлов ; под ред. А. В. Лыкова. – М. : Энергия, 1973. – 336 с.

16. Карслоу, Г. С. Теплопроводность твердых тел : пер. со 2-го англ. изд. / Г. С. Карслоу, Д. Егер ; под ред. А. А. Померанцева. – М. : Наука, 1964. – 489 с.

---

### **Methodology for Obtaining the Objective Function and Solving the Problems of Optimization of Methods and Devices for Measuring Thermophysical Properties of Substances Using the Example of the Method of a Plane Pulsed Heat Source**

**S. V. Ponomarev, V. O. Bulanova, E. V. Bulanov**

*Department of Mechatronics and Technological Measurements,  
svponom@yahoo.com; TSTU (1);  
JSC Tambov Plant Oktyabr (2); LLC RASK (3), Tambov, Russia*

**Keywords:** measurement; construction size; thermal diffusivity; method; data processing; optimization; errors; flat thermal impulse; regime parameters; thermal conductivity.

**Abstract:** The paper presents guidelines on the application of the theory of thermal conductivity, methods of mathematical metrology and the theory of errors to obtain a record of the objective function, formulation and subsequent solution of the problem of optimizing methods and devices for measuring the thermophysical properties of substances. An example of the application of these recommendations in the development of the method of a flat pulsed heat source for monitoring the thermophysical properties of solid materials is given.

### References

1. Ponomarev S.V. [Ed.], Mishchenko S.V., Divin A.G., Vertogradskiy V.A., Churikov A.A. *Teoreticheskiye i prakticheskiye osnovy teplofizicheskikh izmereniy: monografiya* [Theoretical and practical foundations of thermophysical measurements: monograph], Moscow: FIZMATLIT, 2008, 408 p. (In Russ.)
2. Gurov A.V., Ponomarev S.V. [Ed.] *Izmereniye teplofizicheskikh svoystv teploizolyatsionnykh materialov metodom ploskogo «mgnovennogo» istochnika teploty: monografiya* [Measurement of the thermophysical properties of heat-insulating materials by the method of a flat “instantaneous” heat source: monograph], Tambov: Izdatel'stvo FGBOU VPO «TGTU», 2013, 100 p. (In Russ.)
3. Gurov A.V., Sosedov G.A., Rodina A.E., Ponomarev S.V. The Choice of the Optimum Conditions for Measuring the Thermal Properties of Materials by the Plane «Instantaneous» Heat Source Method, *Measurement Techniques*, 2012, vol. 55, no. 10, pp. 1187-1192, doi: 10.1007/s11018-012-0106-9
4. Ponomarev S.V., Bulanov Ye.V., Bulanova V.O., Divin A.G. [Minimization of measurement errors of thermal conductivity coefficients and thermal diffusivity of heat-insulating materials by the method of a flat pulsed heat source], *Izmeritel'naya tekhnika* [Measuring equipment], 2018, no. 12, pp. 43-46, doi: 10.32446/0368-1025it.2018-12-43-46 (In Russ., abstract in Eng.)
5. Bulanov Ye.V. *PhD Dissertation (Technical)*, Tambov, 2019, 122 p. (In Russ.)
6. Ponomarev S.V., Divin A.G., Balabanov P.V. [et al.] [Recommendations for developing a methodology for introducing corrections for systematic errors in measuring the thermophysical properties of substances], *Metrologiya* [Metrology], 2013, no. 10, pp. 38-47. (In Russ.)
7. Ponomarev S.V. [Ed.], Divin A.G., Lyubimova D.A. *Primeneniye matematicheskikh osnov metrologii pri optimizatsii rezhimnykh parametrov metodov i osnovnykh konstruksionnykh razmerov ustroystv dlya izmereniya teplofizicheskikh svoystv veshchestv: monografiya* [Application of the mathematical foundations of metrology in optimizing the regime parameters of methods and the main structural dimensions of devices for measuring the thermophysical properties of substances: monograph], Tambov: Izdatel'stvo FGBOU VPO «TGTU», 2015, 160 p. (In Russ.)
8. Ponomarev S.V., Mishchenko S.V. *Metody i ustroystva dlya izmereniya effektivnykh teplofizicheskikh kharakteristik potokov tekhnologicheskikh zhidkostey* [Methods and devices for measuring the effective thermophysical characteristics of technological liquid flows], Tambov: Izdatel'stvo Tamb. gos. tekhn. un-ta, 1997, 248 p. (In Russ.)
9. Ponomarev S.V., Mishchenko S.V., Irvine T.F. *Measurements of Thermophysical Properties by Laminar Flow Methods*, New-York: Begell House Inc., 2001, 278 p.
10. Churikov A.A. *PhD Dissertation (Technical)*, Tambov, 2000, 641 p. (In Russ.)
11. Vlasov V.V., Shatalov Yu.S., Ponomarev S.V. [et al.] *Teplofizicheskiye izmereniya. Spravochnoye posobiye po metodam rascheta poley, kharakteristik teplomassoperenosa i avtomatizatsii izmereniy* [Thermophysical measurements.

Reference manual on methods of calculating fields, characteristics of heat and mass transfer and automation of measurements], Tambov: Izdatel'stvo VNIIRTmash, 1975, 256 p. (In Russ.)

12. Korn G., Korn T. *Spravochnik po matematike dlya nauchnykh rabotnikov i inzhenerov. Opredeleniya. Teoremy. Formuly* [Handbook of mathematics for scientists and engineers. Definitions. Theorems. Formulas], Moscow: Nauka, 1973, 832 p. (In Russ.)

13. Zaydel' A.N. *Oshibki izmereniy fizicheskikh velichin* [Measurement errors of physical quantities], Leningrad: Nauka, 1974, 108 p. (In Russ.)

14. Lykov A.V. *Teoriya teploprovodnosti* [Theory of thermal conductivity], Moscow: Vysshaya shkola, 1967, 600 p. (In Russ.)

15. Shashkov A.G., Volokhov G.M., Abramenko T.N., Kozlov V.P., Lykov A.V. [Ed.] *Metody opredeleniya teploprovodnosti i temperaturoprovodnosti* [Methods for determining thermal conductivity and thermal diffusivity], Moscow: Energiya, 1973, 336 p. (In Russ.)

16. Karslou G.S., Yeger D., Pomerantsev A.A. [Ed.] *Teploprovodnost' tverdykh tel* [Thermal conductivity of solids], Moscow: Nauka, 1964, 489 p. (In Russ.)

---

### **Methodik zur Erhaltung der Zielfunktion und Lösung der Optimierungsprobleme bei Methoden und Geräten zur Messung der thermophysikalischen Eigenschaften von Stoffen am Beispiel des Verfahrens einer flachen Pulswärmequelle**

**Zusammenfassung:** Es sind die methodischen Empfehlungen für die Anwendung der Wärmeleitungstheorie, der Methoden der mathematischen Messtechnik und der Fehlertheorie betrachtet, um eine Aufzeichnung der Zielfunktion, die Festlegung und die anschließende Neuerstellung des Optimierungsproblems für Methoden und Geräte zur Messung der thermischen Eigenschaften von Substanzen zu erhalten. Ein Beispiel für die Anwendung dieser Empfehlungen bei der Entwicklung des Verfahrens einer flachen Pulswärmequelle zur Überwachung der thermophysikalischen Eigenschaften fester Materialien ist gegeben.

---

### **Méthodologie d'obtention de la fonction cible et de la résolution des problèmes d'optimisation des méthodes et des dispositifs pour la mesure des propriétés thermophysiques des matières à l'aide de la méthode de la source de chaleur pulsée plate**

**Résumé:** Sont examinées les recommandations méthodologiques pour l'application de la théorie de la conductivité thermique, des méthodes de métrologie mathématique et de la théorie des erreurs pour l'enregistrement de la fonction cible, la formulation et la résolution ultérieure du problème d'optimisation des méthodes et des dispositifs pour mesurer les propriétés thermiques et physiques des substances. Est donné un exemple de l'application de ces recommandations lors de l'élaboration d'une méthode de source de chaleur pulsée plate pour contrôler les propriétés thermiques des matériaux solides.

---

**Авторы:** *Пономарев Сергей Васильевич* – доктор технических наук, профессор кафедры «Мехатроника и технологические измерения», ФГБОУ ВО «ТГТУ», Тамбов; *Буланова Валентина Олеговна* – кандидат технических наук, ведущий инженер, АО «Тамбовский завод «Октябрь», Тамбов; *Буланов Евгений Владимирович* – кандидат технических наук, начальник отдела капитального строительства, ООО «РАСК», Тамбов, Россия.